文部科学省 科学研究費補助金 新学術領域研究

多面的アプローチの統合による計算限界の解明

A Multifaceted Approach toward Understanding the Limitations of Computation

平成２５年８月９日発行
ニュースレター　Vol. 4

研究テーマとしての P vs. NP

茨木 俊秀（京都情報大学院大学）

このプロジェクトの話を最初に聞いたとき，私の第一印象は「やりましたね，渡辺先生」だった．この分野のすべての研究者は P vs. NP問題の影を背後に感じながら仕事をしているものの，それを前面に立てるのは気恥ずかしいというか，大変勇気を必要とするに違いないからである．そういえば以前，科研費の審査員をしていた頃，若手研究者の一人がPとNP問題の解決をテーマに申請していたのを覚えている．この向こう見ずが，と思いながら私は高い評価を与えたのだが，最終的に採択されたかどうかは残念ながら記憶していない．

プロジェクトの審査にあたって，渡辺先生は次のように説明されたのではないかと想像する．P はコンピュータを用いて現実に解ける問題のクラス，それに対しNPの中のある種の問題（NP完全問題）は，そう簡単には解けず手におえない (intractable) と考えられているが，数学的な証明はまだ得られていない．したがって，本当に手におえないかどうかを証明できれば，コンピュータによる問題解決の限界を明らかにすることになり，現実への影響は計り知れない．

今日は，この主張はかなり嘘っぽいということから始めたい．PとNPがどちらに転んでも，世の中に大きな変化は生じないということである．

まず，P = NPの場合を考えてみる．これは大変素晴らしい結末で，そうだとすると我々が普段遭遇する NP の問題がすべて多項式時間で解けるのだから，世の中に何の悩みも残らないという訳である．でも，本当だろうか．私には，P = NPであっても，巡回セールスマン問題が最短路問題と同程度の計算時間で解けるとは思えない．多項式といっても，実は必要な次数は様々で，実際，クラスPの内部に複雑さの無限階層があることが知られている．巡回セールスマン問題は最短路問題に比べ，その階層のかなり上に位置していて，やはり両者の間には困難さの大きな違いが残るというだけではないだろうか．しかも，個々の問題がその階層のどこに位置するかを知るには，それぞれの計算量の下界を明らかにしなければならないので，これはまた大変難しい．つまり，巡回セールスマン問題が最短路問題に比べずっと困難であるとしても，その証明は，PとNP問題に似て，簡単にできそうもない．

一方，P ≠ NPだったらどうだろう？この場合，巡回セールスマン問題は多項式時間では解けないことになるが，それで直ちに手におえないと断じてよいだろうか．ウエブのTSPLIBを訪ねてみると，街の数が数万という問題例が多数，厳密に解けたと報告されている．これでも手におえないと言えるのかどうか，もう少し丁寧に考えてみる必要がありそうである．

多項式時間とそうでないもの，たとえば指数時間と比較するときの議論は次のようになされる．一例として$1000n$と2^nを比べてみると，$n = 10$のとき，$1000n = 10{,}000$，$2^n = 1024$ で$1000n$ の方が大きいけれど，$n = 20$になると$1000n = 20{,}000$，$2^n = 1{,}048{,}576$となって2^nがかなり大きい．このあと，$n = 30, 40, \ldots$と増していくと，関数としての増加率に圧倒的な違いがあって，指数関数はすぐ実用的な計算量でなくなってしまう．だから手におえない．私もいろいろな所で，この類の説明をした覚えがある．

しかし，実務家は，このような$n \to \infty$の議論には興味をもっていない．現実に目の前にある問題の規模，たとえば$n = 1000$が解けるかどうかだけが重要である．この観点に立つと，P ≠ NP理論の前提になっている，決定性逐次アルゴリズムによる$n \to \infty$時の最悪時間量評価，を金科玉条にするのは少々気が引けるように思える．

さらに，本プロジェクトの多様な研究テーマからも読み取れるように，アルゴリズムの定義自体がどんどん拡張されている．乱択アルゴリズムはもちろん，近似アルゴリズムのパラダイムもさまざまに発展しているので，「解ける」と言っても多様な解釈が可能である．その結果，仮にP ≠ NPであっても，優秀な研究者の力を結集すれば，NP完全問題やNP困難問題を，たとえば$n = 1000$程度の規模を念頭に置いて，（広い意味で）現実的に解くことは決して夢ではないだろう．実際，巡回セールスマン問題についていえば，実務家の世界では，実用的に解ける問題と認識されている．

さて，P = NPとP ≠ NPのどちらであっても現実への大きな影響はないとすれば，なぜこの問題にチャレンジしなければならないのか？それはその問題がそこにあるからだ，としか言いようがない．PとNPは，計算量理論の世界ではまったく自然で基本的な概念である．この二つが同じかどうかが未解決のままでは，喉に刺さった魚の骨のように，心を安らかに保つことができない．さらに嬉しいことに，この問いの解決は大変難しいらしい．これがこの分野の研究者，とくに若い人たちのチャレンジ精神を鼓舞しない訳がない．

知的好奇心が大きな研究につながった例は，PとNP以外にも沢山ある．最近の話題の中では，物理の研究者達が騒いでいるヒッグス粒子が最たるものだろう．宇宙誕生のビ

ッグバン直後は，超高温のためすべての粒子が光速で運動していたのが，宇宙が膨張して温度が下がってくると，宇宙全体に満ちているヒッグス粒子が他の粒子に絡み付いて運動を邪魔するようになった．言い換えると粒子が質量を獲得して，その結果我々が暮らしている現在の宇宙が形成された，と説明されている．正直なところ，何度聞いてもよく理解できないのだけれど，宇宙の成り立ちに関わるロマンに満ちた話題であることは伝わってくる．

ヒッグス粒子の存在が実証されようがされまいが，我々の生活に直接影響を与えるものではないらしい．しかし，その目的にジュネーブにある国際研究機構CERNではLHCという全周27kmもある巨大な加速器を建設したのである．それを使って実験を進めた結果，ヒッグス粒子の確認にほぼ成功したことが最近報告された．何とも壮大な話で，好奇心もここまで来ると見事としか言いようがない．これにはさらに続きがあって，もっと大規模な加速器である国際リニアコライダーの建設計画が進んでいて，我国も，岩手県への誘致運動を行っているという記事が最近の新聞に載っていた．

20世紀における原子物理学の最大の成果は原子爆弾と原子力発電だと言われている．しかし，原子爆弾は破壊するだけのものだし，原子力発電についても，最近の苦い経験が教えるように，それ自体大きなリスクを内包していることが明らかになった．それだけでなく，使用済み核燃料をどう処理してよいのか分からないとか，発電が終了した後もスマートに廃炉にする方法はなくて長期の年月と巨大な費用がかかるなど，重要な問題が未解決のまま残されている．物理の研究者達には，このような喫緊のテーマについても研究を集中して解決策を見つけてもらいたいと思うのだが，こちらの方向にはあまり好奇心が向かないのだろうか．

すっかり愚痴っぽくなってしまった．よその分野のことを云々しだすといつまでも終わらないので，この辺で止めておくのがよさそうである．

さて，ギリシャの哲学者プラトンは，紀元前４世紀頃，真の実在としてのイデアを想定し，そこではすべてが矛盾なく調和をもって存在していると説いた．ただし，人間はいくら努力してもそれを完全に知ることはできず，不完全なコピーを手に入れることができるだけだという．PとNPはこのイデアからたまたま転がり落ちた二粒の輝く宝石である．よく似ていて同じじゃないかと疑う人もいるが，その答えはイデアの内部には書かれているものの，直接読むことはできない．自分たちの力でなんとかそれを知りたい．これは人の知性の根源的な営みである．

ともあれ，ELC丸はすでに港を離れた．最終的なゴールは分かっていても，そこへの航路を示す海図は存在しない．航海中には風や雨，また暗礁が待ち構えていることが予想される．困難な航海ではあるが，ゴールを目指して少しでも前進させるため，乗組員全員が全力を尽くされるよう願って止まない．

（茨木　俊秀）

ハンガリーに行ってきました

神山 直之（九州大学）

６月４日から６月７日までハンガリーに行ってきました．もちろん観光のためではなく，「8th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications」へ参加するためです．ELCの皆さんはこの会議をご存知でしょうか．少なくとも個人的には，最も重要な国際会議の1つだと思っております．この会議は２年に１度ハンガリーと日本で交互に開催され，会議の名前通り離散数学や離散アルゴリズムに関する，非常に「濃い」発表がされます．特に，マトロイド，劣モジュラ関数，離散凸解析と行ったキーワードに激しく反応する方はワクワクが止まらないこと必至です．今年は，ハンガリーのヴェスプレームという場所で開催されました．このヴェスプレームの近くには，ハンガリー人が「ハンガリーの海」と呼ぶ（wikipedia情報です）バラトン湖があり，会議の無いときにハンガリーの研究者の皆さんに車で連れて行っていただき，非常に楽しい時間を過ごしました．ちなみに余談ですが，私は昼と夜，２回もバラトン湖に行ってしまいました．

なぜ今回このニュースレターでこの会議のことを話題にしたかと言いますと，実は次回２０１５年の会議は九州で行われる予定となっているからです．是非ともELCの皆さんにも参加して頂きたいと思っており，会議の宣伝をさせて頂ければと思った次第です．もちろん，次回の会議のことはまだ何も決まっていないため，ここでは今回の会議の発表の中で，私個人が特に気になった発表を３つ紹介させて頂きます．個人的な趣味を色濃く反映し，３つのうち２つは安定マッチング関係のものとなってしまったことは，大変申し訳なく思っております．また，以下の紹介における誤り全て私の責任であります．

まずは，今回の会議で最も若い発表者だったという噂（未確認情報ですが）の九州大学の平川さんの発表「M. Hirakawa, Y. Yamauchi, S. Kijima, M. Yamashita: Any Max-Cardinality Popular Matching in a Stable Marriage Problem Consists of the Same People」を紹介させて頂きます．まず，２部グラフ上のマッチング市場とは，各点がその点に接続する辺に対して選好順序を持っている２部グラフと定義します．ここでは，選好順序に同順は許さないとします．この２部グラフ上のマッチング市場において，２つのマッチングMとNが与えられたとき，点vがNをMより「好む」とは，Nにおいてvに接続している辺がMにおけるそれより選好順序で好ましいことと定義します．このとき，あるマッチングMが「最適選好」であるとは，任意のマッチングNに対して，NをMより好む点がMをNより好む点より多

くないということと定義されます．もちろんこの最適選好マッチングの存在性は自明ではないのですが，実は安定マッチングが最適選好マッチングであることが知られています．つまり，安定マッチングは常に存在するので，最適選好マッチングは常に存在することとなります．さらに，安定マッチングは最適選好マッチングの中でも最小のサイズとなることが知られています．つまり，安定マッチングは常に同じ点集合を被覆するという事実より，最小サイズの最適選好マッチングの被覆する点集合は全て同じであることがわかります．平川さんの発表では，驚くことに実は最大サイズの最適選好マッチングの被覆する点集合も全て同じであることを示されました．個人的な予想と結果が異なっており，いい意味で非常に驚きました．

では，続いて安定マッチングのコミュニティでは有名なT. Fleinerが著者に入っている「P. Biro, T. Fleiner, R. Irving: Matching Couples with Scarf's Algorithm」を紹介させて頂きます．本発表では，いわゆる研修医配属問題に「カップル」という概念を加えた問題を扱っています．ここでいうカップルとは研修医の組を意味しており，この問題においては与えられたカップルに関しては配属できる病院に制約があります．つまり，あるカップル(a, b)に対しては，aが病院hに配属されるならば，bはhに近い病院kまたはlに配属されなければならない，といったような感じです．この問題設定は実際の応用から出てきたものであり，実際に安定なマッチングを求めることが必要なのですが，残念なことに与えられた問題例に安定なマッチングが存在するかを判定する問題はNP完全であることが知られています．この発表では，この問題に対して，Scarf's algorithmというものを用いた発見的手法を提案し，既存のアルゴリズムとの比較をしています．もともと，「matching with couples」という言葉は知っていたのですが，実際どのような問題か知らなかったので，それをわかりやすく説明していただけたのが，非常に勉強になりました．さらに，これまで私は安定マッチングの「奇麗な」構造に注目して研究してきたのですが，やはりこのように実用的に必要な問題をなんとかして解くことも必要であることを思い知らされました．

最後に安定マッチング関係ではない論文「A. Bernath, G. Pap: Blocking optimal arborescences」を紹介したいと思います．ある特別な点rを持つ有向グラフにおける有向木とは，rから遠ざかる方向に辺が向き付けられている木を意味します．また，各辺には重みが与えられているとします．ある有向木の重みを，その有向木に含まれる辺の重みの合計で定義します．この発表では，全ての最小重み有向木と共通部分をもつ最小サイズの辺集合を求める問題を扱っています．実は，この問題は前回２０１１年に京都で行われた会議で私が提案させて頂いた問題でした．この問題を提案したときは，この問題はNP困難であると予想していました．しかし，この発表では実はこの問題が多項式時間で解けることが示されました．正直，私の予想と全く逆の結果となって非常にびっくりしました．

このように書いてみると，私は自分の予想に縛られてしまう傾向があることに気がつきました．これではP対NP問題を解決することはできません．もっと柔軟な発想ができるよう，精進したいものです．

（神山　直之）

SoCG2013 会議報告（抜粋）

徳山　豪（東北大学）

※本文は会議報告の抜粋となります．全文はHPを御覧ください．

SoCG2013は６月１７－２０日にブラジル，Rio de Janeiroのリオデジャネイロ大で開催された．４日間のコンファレンスで，午前中にSoCGの本会議，午後はGeometric Computing, Mesh Generation, Computational Topologyの３つのワークショップと，Young Researcher Forum （博士学生の研究報告）がパラレルで開催され，毎日朝８時半から６時あるいは７時まで会議がある充実した（でも時差ボケの私には厳しい）日程であった．

参加総数は１５０人程度，内学生が４０％，論文採択率は本会議は３０％程度．日本からは徳山（東北大・来年の京都開催の会議主催者としてビジネスミーティングで紹介）と，全（東北大），Natsuda Kaothantong（東北大・学生）の３名のみ参加．片道３０時間は辛い．

基調講演（１）

Recent Progress on the Combinatorial Diameter of Polyhedra and Simplicial Complexes

Francisco Santos

幾何学的な下界の話．Hirsh予想の反例の構成で有名な講演者が，その背景や発想を話した．まじめな感じの話であった．反例を作る手法の発想や，反例といっても予想との誤差比は少ないこと，旗多面体を使った基本手法などを紹介した．どのくらいまでの予想を考えているのかという講演者の感覚は参考になる．

基調講演（２）

Putting the Turing into Manufacturing: Recent Developments in Algorithmic Automation

Kenneth Y. Goldberg

ロボティクスの専門で，特に生産ラインのような工業工程での自動化に用いられている計算幾何を紹介した．　例えば，多角形の部品がコンベアを流れてきているときに，すべてを同一方向に揃えるのは，（たとえばテレビ番組等で）よく目にするが，そのメカニズム(コロンブスの卵のようなアイデア)や，それを一般の多角形にしたときの工程数最小化や，アルゴリズムについて話した．応用分野だが，講演者自身がSoCGにかなり論文がある人で，ビデオを多用したサービス満点の講演．３次元の場合はまだ未解決な部分が多いらしい．

SoCG本会議で印象に残った発表

A Simple Aggregative Algorithm for Counting Triangulations of Planar Point Sets and Related Problems

Victor Alvarez and Raimund Seidel

平面点集合の三角形分割の数を数えるアルゴリズム．従来は列挙ベースだったが，今回のアルゴリズムはほぼ2^nで，三角形分割の総数（凸配置だとカタラン数）よりかなり少ない．手法は，ジグザグ分割線を平面走査のように移動させていくというもの．

日本の研究者だと，ＺＤＤとかの武器を持っているので，もっといい結果が出るような気がする．Best paper賞だが，ちょっとメインストリームではないので，意外な感じもある．

The Graphs of Planar Soap Bubbles

David Eppstein

シャボン玉の膜形状は，Kelvin問題といって，Taylorがフィールズ賞を受けたりして数学的には有名で，局所構造はよくわかっているが，その離散的な胞体隣接構造はよくわかっていない．この論文では，二次元の場合に単純化して，ブリッジのない３正則グラフはすべて実現されることを示している．テクニカルには，複素平面とみて，メビウス写像を用いるのが目新しい．３次元でできたらインパクトがありそう．

Equal Coefficients and Tolerance in Coloured Tverberg Partitions

Pablo Soberón

Terberg Partition は，点集合があるとき，それをk個の部分集合に分けて，それらの凸包が共通集合を持つようにできるという結果で，d次元ならば$(k-1)(d+1)+1$点あれば十分である．もう少しゆるく，$k(d+1)$点にすれば，k個の単体で交わるものが作れるということになり，例えばHellyの定理などに直結する．

Compressive Sensing Using Locality-Preserving Matrices

Elyot Grant and Piotr Indyk

n次元のデータxでスパースなものがあった時に，これをm次元のデータに圧縮し，圧縮データから，スパースなxを復元するユニバーサル(データに依存しない)手法は圧縮センシングという．ハッシュや，画像のフーリエ変換などは典型的な手法である．ここではフーリエ変換などではなく，Axの形での線形変換を考える．LSHは代表的なものだが，ランダム行列をもちいる．一方，特にxが画像のピクセル集合などの場合に，その性質を利用して幾何的に構築することができること，しかし圧縮には限界があることをこの論文では示している．面白いが，データベースに近い論文．

Competitive Query Strategies for Minimising the Ply of the Potential Locations of Moving Points

Will Evans, David Kirkpatrick, Maarten Löffler and Frank Staals

個人的には一番面白かった．動く点集合の管理だが，各点の最大スピードのみが与えられて，軌跡は予測できないとする．各点は存在可能円の中にあり，円は時間とともに広がっていく．そこで，各点に通信を送り，正確な位置をアップデートできるが，その通信中にも他の点の存在円は広がっていく．この時，目的は，あるターゲットの時間（十分先の時間である）に，存在円たちの最大に重なる点での重なり数(ply)を最小にする．例えばアドホックネットワークでの電波干渉の最小化のような問題設定である．不確定性があるので，最適(各点の軌跡が判っている場合)に対するオンライン競合比を考察する．問題の新しさがアピールポイント

リオは，コンフェデレーションカップの最中で，また，大規模デモがあったりして，落ち着かなかった．バンケットはシュラスコの店で，肉を食べ放題．実は学生の発表賞が投票で決まって，バンケットで発表のはずだったが，途中で疲れて帰った（最終日は，昼の便で帰国で，出席できず）ので，学生発表賞がどれだったかは知らない…

来年の京都はずいぶん期待されているようなので，ちょっと責任は重い．

今後の予定

[2013]

8/16-17	ELC Mini-Workshop (B03) 場所：奈良，やまとビル大会議室５F
9/24-26	ELC 計算量理論の秋学校 場所： 文化軽井沢山荘
11/13-16	15th International Symposium on Stabilization, Safety, and Security of Distributed Systems *Place: Osaka, Japan*
11/29-30	平成２５年度第２回領域会議 場所： 東北大学

[2014]

3/14	新学術領域「計算限界解明」シンポジウム 場所：東京工業大学　田町キャンパス

編集委員長　内澤　啓（山形大学）
uchizawa@yz.yamagata-u.ac.jp

副編集委員長　堀山　貴史（埼玉大学）
horiyama@al.ics.saitama-u.ac.jp